

Q1. サッカーの試合でメンバー23人（両チーム選手と主審）のうち、誕生日が同じ人がいる確率は？

上記はライフネット生命のサイトにある問題ですが、Q1の答えに至る経過が書いていないので計算してみました。

<https://media.lifenet-seimei.co.jp/2015/01/13/2024/>

23人の誕生日が全員異なる確率を求める。

1年を365日として23人の誕生日がすべて異なる組み合わせの数は365日から互いに異なる23日を選ぶ数に等しいから

$${}_{365}C_{23} = \frac{365!}{23!(365-23)!}$$

23人すべての誕生日の組み合わせの数は、1列に並んだ23人の誕生日がそれぞれ365通りあるのでその数は $365 \times 365 \times 365 \times \dots \times 365 = 365^{23}$ 、その23人の並び方は最初の1人は23通り、次の1人は22通りであるから $23 \times 22 \times 21 \times \dots \times 2 \times 1 = 23!$ 通り。

1列に並んだすべての人の誕生日の組み合わせを23人の並べかたで割ればよいから

$$23 \text{人すべての誕生日の組み合わせ} = \frac{365^{23}}{23!}$$

したがって23人の誕生日がすべて異なる確率は

$$\begin{aligned} & \frac{365!}{23!(365-23)!} \div \frac{365^{23}}{23!} = \frac{365 \times 23!}{(365-23) \times 365^{23} \times 23!} \\ & = \frac{365 \times 364 \times 363 \times \dots \times 343 \times 342}{365 \times 365 \times 365 \times \dots \times 365 \times 365} \\ & = 0.492703 \end{aligned}$$

従って少なくとも2人が同じ誕生日である確率は

$$1 - 0.492703 = 0.507297$$

すなわち約50%となります。

Q2は有名なハーレム問題を簡単にしたもので、ある国の王(スルタン)が後宮(ハーレム)に毎年一人だけ美女を追加するのですが、ひとりずつ会って一番気に入った美女を選ぶというものです。一旦決めてしまったら次にもっと気に入った美女が来ても変更できないというルールがあって、どうすれば一番の美女を後宮に入れる確率が一番高くなるかという問題です。

答えは以下にあります。

<http://www.pi5.fiberbit.net/tacuslay/harem.pdf>